

Cahier de vacances PC/PSI

Barbara Hérau-Dostal, Guillaume Gallois

Saint-Stanislas, Juin 2025

1 Exercices type CCINP (à chercher en priorité)

Exercice 1 (racines carrées d'un complexe)

1. Déterminer sous forme algébrique les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^2 = 1 + i$.
2. En déduire les expressions à l'aide de radicaux de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

Exercice 2 (racines complexes de polynômes) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les racines complexes du polynôme $X^n + 1$.
2. En déduire les racines complexes du polynôme $(X - 1)^n + (X + 1)^n$.

Exercice 3 (produits de sinus) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soit $P = 1 + X + \dots + X^{n-1}$.

1. Déterminer l'ensemble des racines complexes de P .

En déduire la factorisation, $P = \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_k)$ où $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$1 - e^{ix} = -2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{\frac{ix}{2}}$$

3. En déduire, en considérant $P(1)$ que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

4. Démontrer que :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^k = \prod_{j=1}^{n-1} \left(2 \sin\left(\frac{j\pi}{n}\right)\right)^{n-j}$$

Et en déduire

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^{2k} = n^n$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. En considérant $P(e^{2ix})$, montrer que

$$e^{2inx} - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(e^{2ix} - e^{\frac{-2ik\pi}{n}}\right)$$

6. En déduire

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(x + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin(nx)}{2^{n-1}}$$

Exercice 4 (une équation d'inconnue polynomiale) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, non nul, tel que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

1. Que peut-on dire du degré de P ?
2. Montrer que -1 est racine de P puis en déduire que 1 est racine de P .
3. En déduire l'ensemble des polynômes P vérifiant $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 5 (un système linéaire défini par les racines d'un polynôme)

On considère le polynôme $P = X^3 + X^2 + 1$.

1. Montrer que P possède une unique racine réelle.
2. En déduire que le polynôme P possède trois racines complexes distinctes.
Ces racines seront notées a_1, a_2 et a_3 .
3. Que valent $a_1 + a_2 + a_3$ et $a_1 a_2 a_3$?
4. On considère le système (S) suivant :
$$\begin{cases} x + a_1 y + a_1^2 z = a_1^4 \\ x + a_2 y + a_2^2 z = a_2^4 \\ x + a_3 y + a_3^2 z = a_3^4 \end{cases}.$$
 - (a) Calculer le déterminant du système (S). Vérifier qu'il n'est pas nul.
 - (b) Effectuer la division euclidienne de X^4 par $X^3 + X^2 + 1$. En déduire une solution particulière de (S).
 - (c) Que peut-on en déduire sur l'ensemble des solutions de (S) ?

Exercice 6 (suite définie implicitement) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution positive de (E_n) notée x_n . Vérifier que $x_n \leq 1$.
2. Vérifier que la suite (x_n) est croissante. Montrer que la suite (x_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$.
3. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = 1 - x_n$ et $f_n(t) = n \ln(1 - t) - \ln(t)$ pour $t \in]0, 1[$.

Déterminer un équivalent de $f_n\left(\frac{\ln(n)}{2n}\right)$ et de $f_n\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{\ln(n)}{2n} \leq y_n \leq 2 \frac{\ln(n)}{n}$$

4. Montrer que $\ln(y_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln(n)$ puis que

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Exercice 7 (une suite récurrente) On définit une suite (u_n) par $u_0 \in]0, \pi/2[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n) \quad \text{et on pose} \quad v_n = \int_0^{u_n} \frac{dt}{1 + \sin(t)}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, \pi/2[$.
2. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. Montrer que la suite (v_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_n}{1 + \sin(u_n)} \leq v_n \leq u_n$$

4. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.
5. Montrer que $u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda u_n^3$ pour un λ que l'on déterminera.
6. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n^3$.
7. Montrer que $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \mu u_n^2$ pour un μ que l'on précisera.
8. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$.

Exercice 8 (étude de convergence d'une série) Soit $\alpha > 0$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n k^{\alpha-1} \ln(k)$.

1. Etudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto t^{\alpha-1} \ln(t)$.
2. En utilisant une comparaison série/intégrale, montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^\alpha \ln(n)}{\alpha}$.
3. Montrer que si $\alpha > 1$, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{u_n}$ est convergente.
4. Montrer que si $\alpha < 1$, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{u_n}$ est divergente.

Exercice 9 (une suite d'intégrales) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. Que peut-on en déduire ?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{n+1} + (n+1)I_n = e$$
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)I_n \leq e$.
5. Déterminer la limite de I_n quand $n \rightarrow +\infty$.
6. Montrer que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{n}$.

Exercice 10 (une fonction définie par une intégrale)

1. Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. On précisera $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

2. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$e^x \ln(2) \leq f(x) \leq e^{2x} \ln(2)$$
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f l'application ainsi prolongée sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que l'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 (2 petites équations différentielles) Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On note $(E) : x^2 y' - (2x-1)y = x^2$
 - (a) Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.
 - (b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $y'' + y' - 2y = 9e^x$.

Exercice 12 (équation fonctionnelle se ramenant à une équation différentielle)

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall x > 0$, $f' \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{-f(x)}{2}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que pour tout $t > 0$, $f''(t) + \frac{1}{4t^2} f(t) = 0$.
2. On pose pour tout $u \in \mathbb{R}$, $g(u) = f(e^u)$. Démontrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $4g''(u) - 4g'(u) + g(u) = 0$.
3. En déduire g puis qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t > 0$, $f(t) = a\sqrt{t} \ln(t) + b\sqrt{t}$.
4. Montrer que pour tout $t > 0$, $f(t) = a\sqrt{t} (\ln(t) - 1)$.

Exercice 13 (étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$) On considère l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et le vecteur $e_1 = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 = (1, -2, 0)$.

1. Quel est le rang de A ? Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et une base de $\ker(f)$.
2. Calculer A^2 . Vérifier que (I_3, A, A^2) est une famille libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Calculer $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$ en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ (le résultat sera donné sous forme factorisée).
4. Vérifier que $A^3 = 2A^2 - A$.
5. Calculer $(A - I_3)^2$. En déduire un vecteur $e_2 \in \ker(f - \text{id}_E)^2$ tel que le vecteur $e_3 = f(e_2) - e_2$ ne soit pas nul.
6. Vérifier que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E et déterminer la matrice de f dans cette base.
7. Déterminer la matrice de passage notée Q , de la base canonique à la base $\mathcal{B}$. Comment retrouver la matrice de f dans $\mathcal{B}$ à partir de Q et A ? Vérifier que vous retrouvez bien le même résultat qu'à la question précédente.

Exercice 14 (endomorphismes vérifiant $f \circ g = \text{id}_E$) Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E vérifiant $f \circ g = \text{Id}$.

1. Démontrer que f est surjective et g injective.
2. Dans quel cas peut-on conclure f bijective et $g = f^{-1}$?
3. Montrer que $\text{Ker}(g \circ f) = \ker(f)$ et $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$.
4. Montrer

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$$

5. Vérifier que $g \circ f$ est un projecteur.

Exercice 15 (matrice d'une projection) On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$. On note $(1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $U_1 = 1 + X$, $U_2 = 2$ et $U_3 = 2 - X + \frac{1}{2}X^2$.

1. Justifier que (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
On pose $F = \text{Vect}(U_1)$ et $G = \text{Vect}(U_2, U_3)$.
2. Que peut-on dire de F et G à l'aide de la première question?
3. On note p la projection sur F parallèlement à G .
Déterminer la matrice de p dans la base $(1, X, X^2)$.
4. Autre méthode pour déterminer la matrice de p dans $(1, X, X^2)$.
 - (a) Déterminer la matrice de p dans la base (U_1, U_2, U_3) . On notera D cette matrice.
 - (b) Ecrire la matrice de passage de la base $(1, X, X^2)$ à (U_1, U_2, U_3) . On notera Q cette matrice.
 - (c) En déduire la matrice de p dans la base $(1, X, X^2)$

Exercice 16 (décomposition d'un endomorphisme en somme de projecteurs) Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $u^2 - 2u + \text{id} = 0$ et $u \neq \text{id}$.

1. Montrer que $u \in \text{GL}(E)$ et déterminer u^{-1} .
2. Montrer que $\text{Im}(u - \text{id}) \subset \ker(u - \text{id})$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$. Montrer que $\lambda = 1$.
4. Soit f et g appartenant à $\mathcal{L}(E)$ avec f projecteur. Montrer que $f \circ g = g \Leftrightarrow \text{Im}(g) \subset \text{Im}(f)$.
5. On note $v = u - \text{id}$. Soit S un supplémentaire de $\text{Im}(v)$ dans E . Soit p_1 la projection sur $\text{Im}(v)$ parallèlement à S .
On pose $q_1 = p_1 - v$. Montrer que q_1 est un projecteur et que $\text{Im}(q_1) = \text{Im}(p_1)$.
6. Montrer qu'il existe p et q deux projecteurs tels que $u = p + q$ et $\text{Im}(p) = \ker(q)$.

Exercice 17 (distance à un sous-espace vectoriel) On définit pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$,

$$(P|Q) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$$

1. Vérifier que $(P, Q) \mapsto (P, Q)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer une base orthonormée de $V = \mathbb{R}_2[X]$, notée T_0, T_1 et T_2 avec $\deg(T_i) = i$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur V .
4. Déterminer $\inf_{p \in V} \int_{-1}^1 (p(x) - x^3)^2 dx$.

Exercice 18 (étude d'un endomorphisme d'un espace euclidien) L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère deux vecteurs unitaires a et b , qu'on suppose linéairement indépendants et on pose

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle a | x \rangle \cdot b + \langle b | x \rangle \cdot a$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de E .
2. On note $e_1 = a + b$ et $e_2 = a - b$. Calculer $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
3. Pour tout $(x, y) \in E^2$, comparer $\langle f(x) | y \rangle$ et $\langle x | f(y) \rangle$. En déduire $\ker(f) \perp \text{Im}(f)$.
4. Déterminer le noyau et l'image de f . Sont-ils supplémentaires dans E ?
5. Soit $(e_3, \dots, e_n)$ une base de $\ker f$. Déterminer la matrice de f dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Exercice 19 (min et max d'un lancer de deux dés) On lance deux dés équilibrés. Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires correspondant aux résultats des lancers. On pose $X = \min\{U_1, U_2\}$ et $Y = \max\{U_1, U_2\}$.

1. Calculer $\mathbf{P}(U_1 \geq k)$ puis $\mathbf{P}(X \geq k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$.
2. Déterminer la loi et l'espérance de X .
3. Calculer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2 . En déduire l'espérance de Y .
4. Calculer de même XY et en déduire $\text{Cov}(X, Y)$.

Exercice 20 (un calcul d'espérance) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Un joueur lance successivement et de façon indépendante n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N . Chaque boule a la probabilité $\frac{1}{N}$ de tomber dans chacune des N cases.

On cherche à étudier la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases non vides après n lancers.

1. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs que peut prendre T_n .
2. Donner les lois de T_1 et de T_2 .

Pour la suite, on prendra $n \geq 2$

3. Déterminer les probabilités $\mathbf{P}(T_n = 1)$ et $\mathbf{P}(T_n = 2)$.
4. Calculer $\mathbf{P}(T_n = n)$.

On pourra distinguer les cas $n \leq N$ et $n > N$.

5. Prouver que, pour tout k appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$ on a :

$$\mathbf{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N} \mathbf{P}(T_n = k) + \frac{N - k + 1}{N} \mathbf{P}(T_n = k - 1).$$

6. On considère dans cette question la fonction génératrice :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_n(x) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(T_n = k) x^k.$$

7. Vérifier que $\mathbf{E}(T_n) = G'_n(1)$.
8. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{N} (x - x^2) G'_n(x) + x G_n(x).$$

9. En dérivant l'expression précédente, démontrer que :

$$\mathbf{E}(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \mathbf{E}(T_n) + 1.$$

10. En déduire la valeur de $\mathbf{E}(T_n)$ et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.
11. Retrouver le résultat directement avec les variables aléatoires $X_i = 1$ si la i ème case est pleine, 0 sinon.

2 Exercices type Centrale/Mines

Exercice 21 Soit $P = X^3 + pX + q$ avec $(p, q) \in \mathbb{C}^2$ de racines complexes z_1, z_2 et z_3 .

1. Déterminer le polynôme unitaire Q de degré 3 ayant pour racines $(z_1 - z_2)^2, (z_2 - z_3)^2$ et $(z_3 - z_1)^2$. Exprimer son coefficient en X^2 en fonction de p et q .
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle formé par les points d'affixes z_1, z_2 et z_3 soit équilatéral.

Exercice 22 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $P^* = \sum_{k=0}^n \overline{a_{n-k}} X^k$ avec $a_n \neq 0$.

On note $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ et on suppose que pour tout $z \in U, P(z) \in U$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*, P^*(z) = z^n \overline{P(\bar{z}^{-1})}$.
2. Montrer que $PP^* = X^n$ et en déduire qu'il existe $\alpha \in U$ tel que $P = \alpha X^n$.

Exercice 23 Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$. On pose pour $n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n k u_k$.

Montrer que (v_n) converge et exprimer sa limite en fonction de ℓ .

Exercice 24

1. Soit $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et $c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in [a, b], y(x) \leq c + \int_a^x \varphi(t) y(t) dt$.

Montrer que, pour tout $x \in [a, b], y(x) \leq c \exp\left(\int_a^x \varphi(t) dt\right)$.

2. Soit q une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^*$, croissante, et f une solution de l'équation $f'' + qf = 0$. Montrer que f est bornée.

Exercice 25 Soit f une fonction convexe sur $[a, b]$ (où $a < b$). Montrer que

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Exercice 26 Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, V un sous-espace vectoriel de E , p un projecteur d'image V . Soit u un endomorphisme de E tel que $u^n = \text{id}$ et $u(V) \subset V$. On pose $q = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k \circ p \circ u^{n-k}$.

1. Montrer que $u \circ q = q \circ u$ et $q \circ p = p$.
2. Montrer que q est un projecteur et déterminer l'image de q .
3. En déduire l'existence d'un supplémentaire de V stable par u .

Exercice 27 Soit F l'ensemble des endomorphismes $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ vérifiant pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \Phi(A^T) = \Phi(A)^T$. Vérifier que F est un espace vectoriel et déterminer $\dim(F)$.

Exercice 28 On pose pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N(A) = \text{tr}(A^T A)$.

1. Montrer que $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, N(AB) \leq N(A)N(B)$.
3. Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, 2|\text{tr}(AB)| \leq \text{tr}(A^2) + \text{tr}(B^2)$.

Exercice 29 Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, a et b dans E distincts tels que $\|a\| = \|b\|$. Montrer qu'il existe une unique symétrie orthogonale s par rapport à un espace de dimension $\dim(E) - 1$ telle que $s(a) = b$.

Exercice 30 Une urne contient $2n$ boules de couleurs différentes, n boules sont numérotées 0 et les autres boules sont numérotées de 1 à n . On prend une poignée de n boules dans l'urne. Si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on note U_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée k est dans la poignée et 0 sinon.

1. Déterminer la loi de U_k . Donner son espérance et sa variance, puis calculer $\text{cov}(U_i, U_j)$ pour $i \neq j$.
2. Soit $N = U_1 + \dots + U_n$. Que représente N ? Calculer l'espérance et la variance de N .
3. Soit S la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules présentes dans la poignée. Exprimer S en fonction des U_k puis calculer $\mathbf{E}(S)$.
4. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de boules numérotées 0 présentes dans la poignée. Donner une expression de Z . Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.