Préparation à l'entrée en MPSI ou PCSI

Introduction

Ce document est destiné aux étudiants entrant en MPSI ou PCSI au lycée Saint Stanislas à Nantes. Il est constitué d'exercices pour consolider et réviser les techniques de calcul vues au lycée. Maîtriser celles-ci est indispensable pour être plus à l'aise lors des premiers mois en classe préparatoire en mathématiques mais également dans les autres matières scientifiques.

Les exercices proposés vont de l'exercice d'entrainement à la maîtrise du calcul littéral à des exercices plus ardus qui nécessite davantage de réflexion. Ne pas savoir faire tous les exercices ne préjuge en rien de votre future réussite en CPGE. Le temps passé à la recherche permet aussi de progresser et de mieux comprendre une solution.

Dans les QCM, il y a une et une seule bonne réponse.

Certains exercices sont plus difficiles. Ils sont signalés par le symbole ☛.

Bonne lecture et préparation de la rentrée.

Sommaire

Chapitre 1

Calcul numérique et littéral

1. Opérations dans $\mathbb{R}$

On rappelle qu'il y a seulement deux opérations sur les réels : l'addition et la multiplication. Soustraire c'est ajouter l'opposé : $3-5=3+(-5)$, et diviser c'est multiplier par l'inverse : $\frac{2}{3}=2\times\frac{1}{3}$. Tous les réels ont un opposé, et tous les réels **sauf 0** ont un inverse. L'opposé d'une somme est la somme des opposés : $-(a+b)=-a-b$ et l' inverse d'un produit est le produit des inverses : $\frac{1}{ab}=\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}$.
Des propriétés de ces deux opérations découlent les règles de calcul suivantes :
Pour tous réels a, b, c, d :

- si $a=b$ alors $a+c=b+c$ (**on peut ajouter le même nombre de part et d'autre d'une égalité**), il en découle que si $a+b=c$ alors $a=c-b$.
- si $a=b$ alors $ac=bc$ (**on peut multiplier par le même nombre de part et d'autre d'une égalité**), il en découle que si $ab=c$ et b est non nul alors $a=\frac{c}{b}$. On en déduit également que si b et d sont non nuls alors $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ si et seulement si $ad=bc$ (produit en croix).

Rappels sur les puissances entières :

- Définition : si n est un entier naturel non nul et x un réel, alors $x^n=x\times\cdots\times x$ (n fois), par convention, $x^0=1$ (même si $x=0$!). Si n est un entier naturel et x un réel **non nul**, alors x^{-n} est l'inverse de x^n, c'est à dire $x^{-n}=\frac{1}{x^n}=\frac{1}{x}\times\cdots\times\frac{1}{x}$.
- Règles de calcul : soit x et y des réels et n et m des entiers (éventuellement négatifs si les réels sont non nuls) :
  - $(x\times y)^n=x^n\times y^n$; $\left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n}$ (y non nul).
  - $x^nx^m=x^{n+m}$; $\frac{x^n}{x^m}=x^{n-m}$.
  - $(x^n)^m=x^{nm}$.

1.1. Calculs sur les puissances

★Exercice 1.1

1 – Soit $n\in\mathbb{N}$, à quoi est égal 2^n+2^n ?

☐ 4^n ☐ 4^{n+1} ☐ 2^{n+1} ☐ 3^n

2 – A quoi est égal $\frac{4^{12}}{2^{25}}$?

☐ $\frac{1}{2^{11}}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 2 ☐ 2^{-13}

3 – Soit $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$, à quoi est égal $2^n\times 3^m$?

☐ 6^{mn} ☐ 6^{n+m} ☐ 5^{n+m} ☐ cela ne se simplifie pas

4 – A quoi est égal $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$?

☐ $\sqrt{2}$ ☐ 2 ☐ cela ne se simplifie pas ☐ $\sqrt{2}^{2\sqrt{2}}$

5 – Soit $n \in \mathbb{N}$, à quoi est égal $(-1)^{-2n-1}$?

☐ -1 ☐ 1 ☐ cela dépend de la parité de n ☐ $2n+1$

★Exercice 1.2

Simplifier les expressions suivantes :

1/ $(2a^2b^3)^3$; $(-3ab^2)^4$; $\left((a^2b^3)^2\right)^5$.

2/ $(3a^3)\times(ab^2)^4$; $(5a^2b)^2\times(-ab^3)^3$.

3/ $\left(\dfrac{2a^2}{b^3}\right)^2$; $\left(\dfrac{a^2}{-b^3}\right)^5$.

4/ $(3a^2)\times\left(\dfrac{b^2}{a^3}\right)$; $\left(\dfrac{2a^3}{b^2}\right)\times\left(\dfrac{b}{a^5}\right)$.

5/ $(2ab^{-3})^{-2}$; $(a^2b^{-3})^{-1}$; $\left((a^{-2}b^2)^{-2}\right)^2$.

6/ $(-a^2b^{-1})^{-1}\times(a^{-2}b)^{-2}$; $(5a^{-1}b^2)^2\times(-a^{-2}b)^{-1}$.

7/ $\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^{-1}$; $(3a^2)\times\left(\dfrac{b^{-1}}{a^3}\right)^{-2}$.

★Exercice 1.3

Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer en fonction de $a = 2^n$:

1/ $A = 2^{n+3}$

2/ $B = 2^{2n+1}$

3/ $C = 2^{-2n}$

4/ $D = \dfrac{4^{n+1}}{2^{1-3n}}$

5/ $E = 2^{n+3} - 2^{2n} + 5\times 2^{n+1} - 3\times 2^{n+2}$

6/ $F = (-2)^{2n+3}$

7/ $G = \dfrac{1}{(-2)^{3n-2}}$

8/ $H = 8^{2n}$

1.2. Calculs sur les fractions

★Exercice 1.4

Simplifier les expressions suivantes en précisant le domaine de validité :

1/ $\dfrac{14(6x-7)}{(x-2)(3x+1)}+\dfrac{3x+4}{(x-2)(2x-5)}$; $\dfrac{2x+1}{x^2+2x}\times\dfrac{5x^2+4x}{2x^2+7x+3}$.

2/ $\dfrac{x-4}{x-5}+\dfrac{x-6}{x-4}+\dfrac{x-8}{x-3}$.

3/ $2\dfrac{5x-1}{x(2x-1)}-\dfrac{3x-7}{x(2x+1)}-3\dfrac{10x-1}{4x^2-1}$.

★Exercice 1.5

Simplifier les expressions suivantes où x, y, z et t sont des réels non nuls dès qu'ils apparaissent au dénominateur.

1/ $A = \dfrac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{t}}$

2/ $B = \dfrac{xy+xz}{xt}$

3/ $C = \dfrac{(xy)(xz)}{xt}$

4/ $D = \dfrac{\frac{26}{18}\times\frac{-45}{7}}{\frac{39}{14}}$

5/ $E = \dfrac{3+\frac{4}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{9}}$

6/ $F = \dfrac{12\times 11\times 10\times 9}{5\times 4\times 3\times 2}$

7/ $I = \dfrac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}}$ **8/** $J = \dfrac{(-18)^3 \times 2^4 \times (-50)^3}{(-25)^4 \times (-4)^5 \times (-27)^2}$ **9/** $K = \dfrac{\frac{4x^2+1}{5x} - 1}{\frac{1}{x} - x}$

★Exercice 1.6

Que pensez-vous de l'égalité suivante ?

$$\frac{37^3 + 13^3}{37^3 + 24^3} = \frac{37 + 13}{37 + 24}$$

MÉTHODE : Décomposition en éléments simples

Il est possible d'écrire certaines fractions sous la forme d'une somme, on dit que l'on a décomposer la fraction en éléments simples. Cette décomposition sera précisée et généralisée au cours de l'année. On disposera alors de techniques plus simples pour calculer les coefficients de la décomposition.

Voyons sur un exemple comment procéder. On considère la fraction $\dfrac{2}{x^2 - 3x + 2}$.

- *On cherche les réels qui annulent le dénominateur (racines du dénominateur), ici il s'agit de 1 et 2.*
- *On va pouvoir alors écrire la fraction sous la forme :*

$$\frac{2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{2}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$

où a et b sont deux réels à déterminer.

- *On réduit au même dénominateur le terme de droite :*

$$\frac{2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{a(x-2) + b(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

- *Sachant que les dénominateurs sont égaux, on peut identifier les numérateurs*

$$2 = a(x-2) + b(x-1) = (a+b)x - 2a - b$$

On identifie les coefficients des polynômes obtenus, ce qui conduit au système :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -2a - b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$$

On conclut :

$$\frac{2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-2}{x-1} + \frac{2}{x-2}$$

★Exercice 1.7

Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{2x+3}{x^2+5x+6}$. En déduire une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x^2+5x+6}$ sur un intervalle à préciser.

★Exercice 1.8

Adapter la méthode précédente pour décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{1}{x^3 - 2x^2 - 3x}$

★Exercice 1.9

A l'aide d'une décomposition en éléments simples, démontrer que la suite définie pour $n \geqslant 2$ par :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$

est majorée par 2.

1.3. Développer et factoriser

★Exercice 1.10

1/ Développer :

(a) $(4a - 3b)^2$; $6y + 5x)^2$; $(5ab - 3c^2)^2$.

(b) $(a + b - c)^2$; $(3a - 2b + c)^2$.

(c) $(x+y)^3+(x-y)^3$; $(x^2+y)^2+(x^2-y)^2$.

(d) $(a+3b)(a^2+3ab+9b^2)$; $(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$.

(e) $(1+x^2)(1+x\sqrt{3}+x^2)(1-x\sqrt{3}+x^2)$; $(1+3x+3x^2+x^3)(1-3x^2-x^3)$.

2/ Factoriser :

(a) $(x+3)^2+2(x+3)(x-4)+(x-4)^2$; $4x^3+8x^2y+4xy^2$.

(b) $5x^3-20xy^2$; $81x^4-16y^4$; $49x^2y^2-100$.

(c) $x^2-2xy+y^2-z^2$; $a^2-b^2-c^2-2bc$.

(d) $(x+y)^3-x^3-y^3$; x^3-27y^3.

(e) $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$; $8x^3+125$.

★Exercice 1.11

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ (on pourra écrire $3+2\sqrt{2}$ comme le carré d'un nombre de la forme $a+b\sqrt{2}$)
2. $B=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
3. $C=\left(\sqrt{7-2\sqrt{6}}+\sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2$

★Exercice 1.12

Pour $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$, démontrer l'inégalité suivante :

$$(x-y\sqrt{2})^2(x+y\sqrt{2})^2\leqslant x^4+4y^4$$

A quelle condition a-t-on l'égalité ?

★Exercice 1.13

Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

1. Exprimer $f(x)$ en fonction de $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$.
2. En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

★Exercice 1.14

Soit a et b des réels.

1. Développer $(a+b)^3$ et $(a-b)^3$.
2. Développer $(3-2\sqrt{3})^3$.

★Exercice 1.15

Soit a et b des réels. Compléter les factorisations suivantes :

1. $a^3-b^3=(a-b)(\ldots)$.
2. $a^3+b^3=(a+b)(\ldots)$.
3. $a^4-b^4=(a-b)(\ldots)$.
4. En déduire $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$.

MÉTHODE : Utilisation de la quantité conjuguée

Cette méthode permet de réécrire certaines expressions avec des racines carrées.

- *Soit l'expression* $A=\dfrac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$. *Pour supprimer les racines carrées au dénominateur de la fraction, on multiplie le numérateur et le dénominateur de A par la quantité conjuguée du dénominateur c'est-à-dire par* $\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

$$A=\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sqrt{6}^2-\sqrt{2}^2}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

- *Cette méthode permet de lever des indétermination dans le calcul de limite. Par exemple, si on veut calculer*

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4}-x$, *on commence par transformer l'expression :*

$$\sqrt{x^2+4}-x=(\sqrt{x^2+4}-x)\times\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{\sqrt{x^2+4}+x}=\frac{\sqrt{x^2+4}^2-x^2}{\sqrt{x^2+4}+x}=\frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}$$

Sous cette forme, la limite se calcule sans problème et vaut 0.

★Exercice 1.16

Écrire sans racine carrée au dénominateur, les expressions suivantes :

1. $A=\dfrac{3\sqrt{2}+1}{1-\sqrt{2}}$
2. $B=\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$
3. $C=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

★Exercice 1.17

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.
2. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}-x+1$

1.4. Factorielle

Factorielle

La notation $n!$ qui se lit « factorielle n » désigne le produit $1\times2\times\cdots\times n$. PAr convention $0!=1$. Cette notation permet d'écrire explicitement les coefficients binomiaux :

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall k\in[\![0\,;n]\!],\quad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

★Exercice 1.18

1 – Que vaut 5! ?

☐ 25 ☐ 24 ☐ 120 ☐ 240

2 – Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Que vaut $\dfrac{(n+2)!}{n!}$?

☐ 2 ☐ $2n+3$ ☐ $n+2$ ☐ $(n+1)(n+2)$

3 – Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Que vaut $2\times4\times6\times\cdots\times2n$?

☐ $\dfrac{(2n)!}{n!}$ ☐ $2^n(n!)$ ☐ $2(n!)$ ☐ $(2n)!$

4 – Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Que vaut $1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)$?

☐ $\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)}$ ☐ $\dfrac{n!}{2^n(2n)!}$ ☐ $(2n-1)!$ ☐ $\dfrac{(2n)!}{n!}$

5 – Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Que vaut $\dfrac{1}{(n+1)(n+1)!}+\dfrac{1}{(n+1)!}-\dfrac{1}{nn!}$?

☐ $\dfrac{1}{n(n+1)(n+1)!}$ ☐ $\dfrac{-n}{n(n+1)(n+1)!}$ ☐ $\dfrac{-1}{(n+1)(n+1)!}$ ☐ $-\dfrac{1}{n(n+1)(n+1)!}$

6 – Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\dbinom{n}{2}$?

☐ $\dfrac{n(n+1)}{2}$ ☐ $\dfrac{n}{2(n-2)}$ ☐ $\dfrac{n(n-1)}{2}$ ☐ $\dfrac{n-1}{2}$

★Exercice 1.19

Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n!}{n^n}$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n!}{2^n}$

2. Equations - Inéquations

2.1. Equations

★Exercice 1.20

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $\dfrac{1}{x+3} = \dfrac{2}{x-1}$; $\dfrac{x+1}{x-1} = 2$

(b) $\dfrac{5x+3}{4} - \dfrac{x-9}{3} = \dfrac{x}{2} + 5$

(c) $\dfrac{(2x-3)(2x+3)}{8} - \dfrac{(x-4)^2}{6} = \dfrac{(x+1)(x-2)}{3}$

(d) $\dfrac{(x-2)^2}{3} + \dfrac{(x-5)(x+4)}{2} = \dfrac{(5x+4)(x-3)}{6} - \dfrac{20}{3}$

2/ Même question mais avec un paramètre réel m :

(a) $mx - 3m = 3x + 5m - 1$; $mx - 5 = m - 3x$

(b) $m^2(x-1) + 3m = x + 2$; $m^2(x+1) + 3m = x + 4$

(c) $\dfrac{x+2m}{5} + 2 = \dfrac{3x-m}{2} + \dfrac{m}{10} - \dfrac{m-2x}{20}$

★Exercice 1.21

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $(x-1)(2x+3) + (x+1)^2 = 0$

(b) $(2x+5)^2 = (3x+2)^2$

(c) $(2x+1)(x+1)^2 = 4(2x+1)$

(d) $(2x+1)(3x+2) + (2x+1)(x-2) = 4x^2 - 1$

2/ Même question mais avec un paramètre réel m :

(a) $\dfrac{(m-1)^2 x}{6} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{2x+1}{6} = 3x + \dfrac{m}{6}$

(b) $\dfrac{mx+2}{3-x} = 4$

★Exercice 1.22

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1 . $-3x^2 + 9x - 6 = 0$

2 . $x^2 - 7x + 10 = 0$

3 . $2x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{2} = 0$

4 . $\dfrac{3x^2}{4} + \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{5} = 0$

5 . $\dfrac{2x+5}{x-2} - \dfrac{3x-6}{x+4} = 2$

6 . $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

7 . $(x^2 - 4x - 1)^2 - (6x^2 - 3x - 1)^2 = 0$

8 . $(m-2)x^2 + 5x + 7 - m = 0$

9 . $(m+1)x^2 + (2m+1)x + 2 - m = 0$

★Exercice 1.23

Déterminer les réels x et y de somme S et de produit P dans les cas suivants :

1. $S=9$ et $P=18$
2. $S=6$ et $P=135$
3. $S=2$ et $P=2$
4. $S=2$ et $P=1$
5. $S=\dfrac{8m+1}{m}$ et $P=\dfrac{16m+4}{m}$
6. $S=6$ et $P=135$

★Exercice 1.24

Pour x réel on pose $f(x)=3x^4-7x^3+8x^2-7x+3$.

1. Pour $x\neq 0$, exprimer $\dfrac{f(x)}{x^2}$ en fonction de $y=x+\dfrac{1}{x}$.
2. En déduire un procédé de résolution de l'équation $f(x)=0$.

★Exercice 1.25

Rappel : $|x|=a$ équivaut à $a\geqslant 0$ **et** ($x=a$ **ou** $x=-a$).

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $|x+3|=4$ $|2x-1|=7$
2. $|x-2|=|x+3|$
3. $|x-1|=3x-x^2$
4. $|x|+|x-1|=1$
5. $||x|-|x-1||=1$
6. $|x|+|x+1|+|x-1|=2$

★Exercice 1.26

Rappel : $\sqrt{x}=a$ équivaut à $a\geqslant 0$ **et** $x=a^2$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x+1-\sqrt{4x-15}=4$
2. $\sqrt{16x-7}=8\sqrt{x-4}$
3. $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+3}=2$
4. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-12}=\sqrt{x+12}$

2.2. Inéquations

★Exercice 1.27

Les implications suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si elles sont fausses, donner un contre-exemple en choisissant des valeurs pour les variables mises en jeu.

1. Soit $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$: $a\leqslant b \implies a<b$.
2. Soit $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$: $a<b \implies a\leqslant b$.
3. Soit $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$: $a\leqslant b \implies a+c\leqslant b+c$.
4. Soit $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$: $a\leqslant b \implies a-c\leqslant b-c$.
5. Soit $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$, $d\in\mathbb{R}$: $(a\leqslant b$ et $c\leqslant d) \implies a+c\leqslant b+d$.
6. Soit $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$, $d\in\mathbb{R}$: $(a\leqslant b$ et $c\leqslant d) \implies a-c\leqslant b-d$.
7. Soit $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$, $d\in\mathbb{R}$: $(a\leqslant b$ et $c<d) \implies a+c<b+c$.
8. Soit $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$, $d\in\mathbb{R}$: $(a\leqslant b$ et $c<d) \implies a+c\leqslant b+c$.
9. Soit $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$, $d\in\mathbb{R}$: $(a\leqslant b$ et $c\geqslant d) \implies a-c\leqslant b-d$.
10. Soit $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$: $a\leqslant b \implies ac\leqslant bc$.
11. Soit $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}_+$: $a\leqslant b \implies ac\leqslant bc$.
12. Soit $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}_+$: $a<b \implies ac\leqslant bc$.
13. Soit $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$, $d\in\mathbb{R}$: $(a\leqslant b$ et $c\leqslant d) \implies ac\leqslant bd$.
14. Soit $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$, $d\in\mathbb{R}$: $(0\leqslant a\leqslant b$ et $0\leqslant c\leqslant d) \implies ac\leqslant bd$.
15. Soit $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$, $d\in\mathbb{R}$: $(a\leqslant b\leqslant 0$ et $c\leqslant d\leqslant 0) \implies ac\leqslant bd$.
16. Soit $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$, $d\in\mathbb{R}$: $(a\leqslant b\leqslant 0$ et $c\leqslant d) \implies ac\geqslant bd$.
17. Soit $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$, $d\in\mathbb{R}$: $(a\leqslant 0\leqslant b$ et $c\leqslant 0\leqslant d) \implies ac\leqslant bd$.

18 . Soit $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$: $a \leqslant b \implies \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$.

19 . Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$: $a \leqslant b \implies a^2 \leqslant b^2$.

20 . Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$: $0 \leqslant a \leqslant b \implies a^2 \leqslant b^2$.

21 . Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$: $a \leqslant b \leqslant 0 \implies a^2 \leqslant b^2$.

22 . Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$: $a \leqslant b \leqslant 0 \implies a^2 \geqslant b^2$.

23 . Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$: $a \leqslant b \implies a^3 \leqslant b^3$.

24 . Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$: $a \leqslant b \implies \dfrac{1}{a} \leqslant \dfrac{1}{b}$.

25 . Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$: $0 < a \leqslant b \implies \dfrac{1}{a} \leqslant \dfrac{1}{b}$.

26 . Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$: $a \leqslant b < 0 \implies \dfrac{1}{a} \leqslant \dfrac{1}{b}$.

27 . Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^*$, $d \in \mathbb{R}^*$: $(a \leqslant b \text{ et } c \geqslant d) \implies \dfrac{a}{c} \leqslant \dfrac{b}{d}$.

★Exercice 1.28

On considère deux réels x et y vérifiant $2 \leqslant x \leqslant 4$ et $-5 \leqslant y < -3$. Donner un encadrement de $x+y$, $x-y$, xy et $\dfrac{x}{y}$.

★Exercice 1.29

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comparer x et x^2.

★Exercice 1.30

Résoudre l'inéquation d'inconnue x dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{2}{x} < 1$$

Chapitre 2

Fonctions usuelles

1. Fonctions polynomiales

1.1. Trinôme du second degré

★Exercice 2.1

Déterminer, si elle existe, $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}$. On pourra commencer par simplifier la fraction.

★Exercice 2.2

Trouver tous les réels x solutions des équations suivantes :

1 . $(x-1)(x-3)=1$

2 . $x^3-5x^2+6x=0$

3 . $\dfrac{x+7}{x-2}+\dfrac{4x-2}{x-5}=5$

4 . $x^4-2x^2-6=0$

5 . $\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{5}{x-1}=1$

6 . ☛ $e^{-x}-5=e^x$

★Exercice 2.3

Quel est le maximum de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ avec a, b et c réels et $a<0$?
Même question avec le minimum et $a>0$.

Signe d'un trinôme du second degré - Somme et produit des racines

On considère le trinôme ax^2+bx+c avec $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$. On note α et β les racines réelles ou complexes du trinôme (éventuellement $\alpha=\beta$ en cas de racine double). On a :

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta) \qquad (\bigstar)$$

Cette factorisation permet de trouver le signe du trinôme selon le discriminant Δ :

- si $\Delta>0$, le trinôme est du signe de $-a$ entre les racines et du signe de a à l'extérieur des racines.
- si $\Delta\leqslant 0$, le trinôme est de signe constant celui de a sur $\mathbb{R}$.

En développant le second membre de ($\bigstar$), on obtient $ax^2+bx+c=a(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta)$ et en identifiant les coefficients des termes de même degré, on a :

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\text{(somme des racines)} \qquad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}\text{ (produit des racines)}$$

Réciproquement deux réels de somme S et de produit P sont les racines du trinôme :

$$x^2-Sx+P$$

★Exercice 2.4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1 . $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$

2 . $x^2 \geqslant x$

3 . $x^2 - 2x + 3 > 0$

4 . $25 \leqslant (x-2)^2 \leqslant 36$

5 . $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \dfrac{-x+2}{x-3}$

6 . ☛ $x + \sqrt{x+1} < 11$

1.2. Fonctions polynomiales

Racines et factorisation d'une fonction polynomiale

- Une fonction polynomiale est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

où les a_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, sont des réels et $n \in \mathbb{N}$. Si $a_n \neq 0$, alors n est appelé le degré de la fonction polynomiale.

- Si a est un réel ou un complexe solution de l'équation $f(x) = 0$ alors il est possible de factoriser $f(x)$ par $(x - a)$.
  Par exemple, on considère la fonction polynomiale f définie par

$$f(x) = x^3 + 2x + 3$$

On remarque que $f(-1) = 0$. On peut donc factoriser $f(x)$ par $x - (-1) = x + 1$. Par conséquent, il existe des réels a, b et c tels que :

$$f(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$$

De tête, on trouve $a = 1$ (on identifie les termes de degré 3), $c = 3$ (idem pour les termes constants) et $b = -1$ (on identifie les termes de degré 2 ou 1). On a ainsi :

$$f(x) = x^3 + 2x + 3 = (x+1)(x^2 - x + 3)$$

- Si vous ne parvenez pas à trouver de tête les coefficients, on peut toujours développer $(x+1)(ax^2+bx+c)$ et résoudre le système obtenu en identifiant les coefficients des termes de même degré.

★Exercice 2.5

En trouvant une solution évidente, trouver tous les réels solutions de l'équation :

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

★Exercice 2.6

Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$ peut-on mettre en facteur $x - 2$ dans la fonction polynomiale suivante ?

$$f(x) = 3x^3 - ax^2 + 2x - 4$$

Avec cette valeur de a, résoudre l'équation $f(x) = 0$.

★Exercice 2.7

☛ Montrer que l'équation suivante admet une unique solution réelle :

$$x^3 - 3x^2 + 6x + 2 = 0$$

2. Exponentielle et logarithme

★Exercice 2.8

Vrai ou faux.

		V	F
1.	Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, $e^{x+y} = e^x e^y$	❑	❑
2.	Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$	❑	❑
3.	Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^{-x} = -e^x$	❑	❑
4.	Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, $e^{xy} = e^x + e^y$	❑	❑
5.	Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$	❑	❑
6.	Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$	❑	❑
7.	Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{\ln(x)}$	❑	❑
8.	Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ $\ln\left(\dfrac{1}{2}x\right) = \sqrt{\ln(x)}$	❑	❑
9.	Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ $\ln(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$	❑	❑
10.	$e^{\ln 5} + e^{-\ln 3} = 2$	❑	❑
11.	$e^{\frac{1}{2}\ln 4} + e^{-\ln\frac{1}{2}} = 4$	❑	❑
12.	Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\ln(e^x + 1) = x + \ln(e^{-x} + 1)$	❑	❑
13.	Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\ln((x^3+1)^2) = 2\ln(x^3+1)$	❑	❑
14.	$\ln(e^{-2}) = -2$	❑	❑
15.	L'unique solution de l'équation $\ln(x+2) = 1$ est $x = e - 2$	❑	❑

★Exercice 2.9

1 – Soit $x > 0$. A quoi est égal $\ln(x+1) - \ln(x)$?

☐ $\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ ☐ $\ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$ ☐ 0 ☐ $-\ln(x)$

2 – A quoi est égal $\ln(3^4) + \ln(3^2) - \ln(3^6)$?

☐ 1 ☐ 0 ☐ e ☐ cela ne se simplifie pas

3 – Soit $x > 0$. A quoi est égal $\sqrt{\ln(x)}$?

☐ $\dfrac{1}{2}\ln(x)$ ☐ $\ln\left(\dfrac{1}{2}x\right)$ ☐ $\ln(\sqrt{x})$ ☐ cela ne se simplifie pas

4 – Soit $x > 0$. A quoi est égal $\ln\left(x^{\frac{4}{3}}\right)$?

☐ $\dfrac{1}{3}\ln(x)$ ☐ $\dfrac{4}{3}\ln(x)$ ☐ $\ln\left(\dfrac{4}{3}\right) + \ln(x)$ ☐ $x\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$

5 – Soit x et y des réels. A quoi est égal e^{xy} ?

☐ $e^x + e^y$ ☐ $e^x e^y$ ☐ cela ne se simplifie pas ☐ e^{x+y}

6 – Soit $x \in \mathbb{R}$. A quoi est égal $\dfrac{1}{e^x}$?

☐ $e^{\frac{1}{x}}$ ☐ e^{-x} ☐ cela ne se simplifie pas ☐ $-e^x$

7 – A quoi est égal le réel $(\ln(4)) \times \ln(\sqrt{2})$?

☐ $\ln(4+\sqrt{2})$ ☐ $\ln(4\sqrt{2})$ ☐ $\ln(2)$ ☐ $(\ln(2))^2$

8 – Soit $n \in \mathbb{Z}$. A quoi est égal $\ln(e^n) - 2e + \ln(1)$?

☐ $e^n - 2e + e$ ☐ $e^n - 2e$ ☐ $n - 2e$ ☐ $n - 2e + 1$

9 – A quoi est égal le réel $\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3})$?

☐ 1 ☐ 0 ☐ 4 ☐ $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

★Exercice 2.10

Exprimer à l'aide de ln(2) et ln(3) :

1 . $A = \ln(96)$

2 . $B = \ln(6^5)$

3 . $C = \dfrac{1}{\ln(12)}$

4 . $D = \ln\left(\dfrac{1}{12}\right)$

5 . $E = \ln(18 \times 36)$

6 . $F = \ln(12 + 36)$

★Exercice 2.11

Calculer les limites suivantes :

1 . $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$

2 . $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)$

3 . $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x}$

4 . $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

5 . $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{x}$

6 . $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}$

7 . $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$

8 . $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

9 . $\lim\limits_{x\to 0} xe^x$

10 . $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x$

11 . $\lim\limits_{x\to 3} x\ln(x)$

12 . $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{2x}$

13 . $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x}$

14 . $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x)$

15 . $\lim\limits_{x\to-1} x\ln(x)$

16 . ☛ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{3x}$

★Exercice 2.12

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1 . $e^{2x+1} = 3$

2 . $e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$

3 . $\ln(\ln(x)) < -2$

4 . $e^{x^2+6} \leqslant e^{5x}$

5 . $\ln(x-2) + \ln(x+3) = \ln(2)$

6 . ☛ $(\ln(x))^2 + \dfrac{1}{(\ln(x))^2} = 2$

7 . ☛ $2\ln(x) + \ln(x+1) \geqslant \ln(x^3 - x^2 + x)$

8 . $\dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \geqslant 1$

★Exercice 2.13

☛ On pose $f : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

1 . Déterminer l'ensemble de définition de f, noté D_f.

2 . Montrer que la fonction f est impaire, c'est-à-dire que pour tout $x \in D_f$, on a $f(-x) = -f(x)$.

3. Valeur absolue

Définition et propriétés

La valeur absolue d'un réel x (notée $|x|$) est le maximum entre x et $-x$, autrement dit :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geqslant 0$.
- $|xy| = |x|\,|y|$ (en particulier $|-x| = |x|$) et $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.
- $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).
- Se « débarrasser » d'une valeur absolue :
  - ⋇ Dans une égalité : $|x| = a$ équivaut à $a \leqslant 0$ et ($x = a$ **ou** $x = -a$).
  - ⋇ Dans une inégalité :

    $|x| \leqslant a$ équivaut à $-a \leqslant x \leqslant a$ (pas de solution si $a < 0$)

    $|x| \geqslant a$ équivaut à $x \leqslant -a$ **ou** $x \geqslant a$.

★Exercice 2.14

Simplifier

$$A = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(3-2\sqrt{3})^2}$$

★Exercice 2.15

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1 . $|x| = 36$

2 . $|x| \leqslant 4$

3 . $|x| > 7$

4 . $2 \leqslant |x| < 5$

5 . $|x-2| \leqslant 9$

6 . $|x+1| \geqslant 4$

7 . $|x+1| = |x-2|$

8 . ☛ $\left|x^2 - 5x\right| = 4$

★Exercice 2.16

Quelles assertions traduisent la relation $|x-a| \leqslant \varepsilon$ où x, a et ε sont des réels avec $\varepsilon > 0$?

1 . $-\varepsilon \leqslant x - a \leqslant \varepsilon$

2 . $\varepsilon \leqslant x - a \leqslant -\varepsilon$

3 . $a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a + \varepsilon$

4 . $\varepsilon - a \leqslant x \leqslant \varepsilon + a$

Chapitre 3

Trigonométrie

Guide de survie en trigonométrie

On considère a et b des réels.

Pythagore : $\cos^2(a)+\sin^2(a)=1$.

Angles opposés, complémentaires, supplémentaires.

$$\begin{array}{c|c|c|c}
\cos(a+2\pi)=\cos(a) & \sin(a+2\pi)=\sin(a) & \cos(-a)=\cos(a) & \sin(-a)=-\sin(a)\\
\cos(a+\pi)=-\cos(a) & \sin(a+\pi)=-\sin(a) & \cos(\pi-a)=-\cos(a) & \sin(\pi-a)=\sin(a)\\
\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\sin(a) & \sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\cos(a) & \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin(a) & \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos(a)
\end{array}$$

Valeurs remarquables.

a	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(a)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(a)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Duplication et linéarisation.

$$\begin{array}{c|c}
\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a) & \cos^2(a)=\dfrac{1+\cos(2a)}{2}\\
\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a) & \sin^2(a)=\dfrac{1-\cos(2a)}{2}
\end{array}$$

Formules d'addition.

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$$

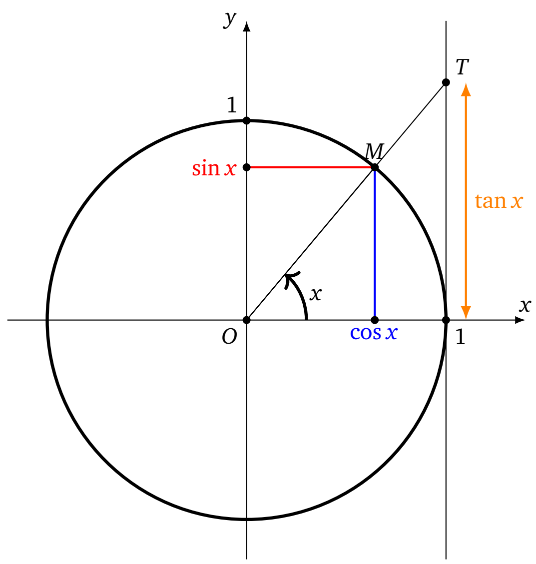
$$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$$

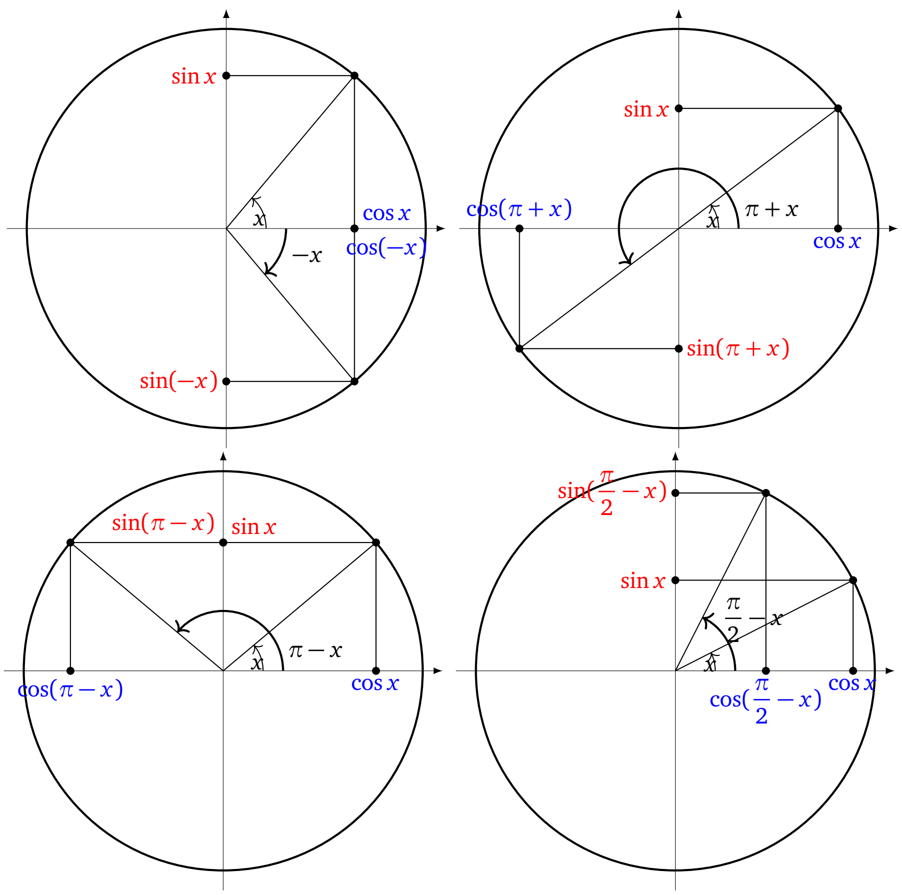
Equations trigonométriques.

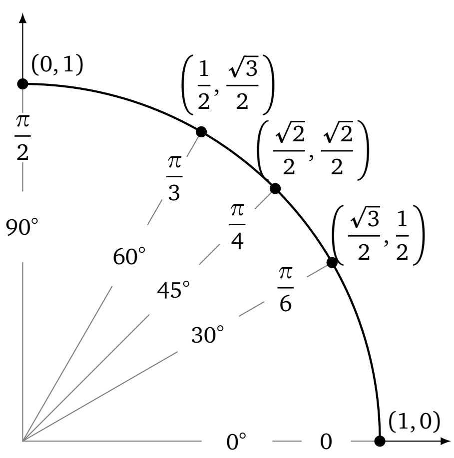
$$\cos(a)=\cos(b) \iff a\equiv b[2\pi] \text{ ou } a\equiv -b[2\pi] \quad \text{et} \quad \sin(a)=\sin(b) \iff a\equiv b[2\pi] \text{ ou } a\equiv \pi-b[2\pi]$$

La notation $a\equiv b[2\pi]$ signifie qu'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $a=b+2k\pi$.

La majorité des formules précédentes se retrouvent à l'aide du cercle trigonométrique.

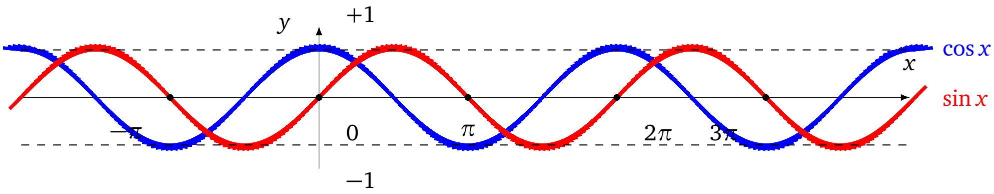

y
x
T
1
M
sin x
tan x
x
O
cos x
1


sin x
cos x
x
−x
cos(−x)
sin(−x)
sin x
cos(π + x)
π + x
cos x
sin(π + x)
sin(π − x)
sin x
π − x
cos(π − x)
cos x
sin(π/2 − x)
sin x
π/2 − x
cos(π/2 − x)
cos x

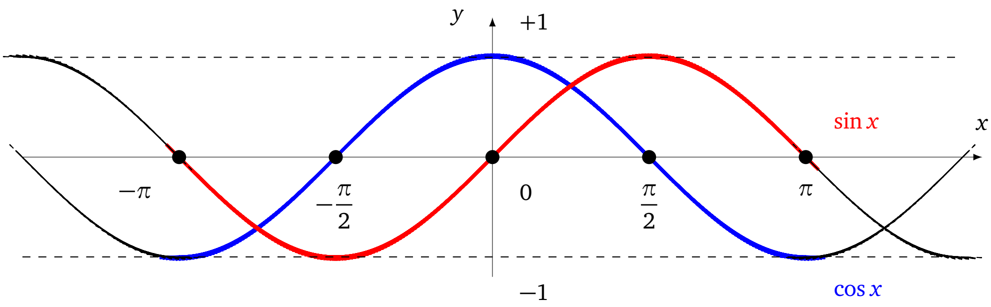

(0, 1)
(1/2, √3/2)
(√2/2, √2/2)
(√3/2, 1/2)
π/2
π/3
π/4
π/6
90°
60°
45°
30°
0°
0
(1, 0)

Fonctions cosinus et sinus

La fonction cosinus est périodique de période 2π et elle paire (donc symétrie par rapport à l'axe des ordonnées). La fonction sinus est aussi périodique de période de 2π mais elle impaire (donc symétrie par rapport à l'origine).



Voici un zoom sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.



★Exercice 3.1

a, b sont des réels. A l'aide du formulaire, donner des formules pour :

1. $\cos(a)\cos(b)$
2. $\sin(a)\cos(b)$
3. $\sin(a)\sin(b)$
4. $\cos(a)+\cos(b)$
5. $\sin(a)+\sin(b)$

★Exercice 3.2

Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ de deux façons différentes :

1. En utilisant l'une des formule de linéarisation et développement.
2. En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

★Exercice 3.3

Donner les valeurs suivantes :

1. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
2. $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$
3. $\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$
4. $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$
5. $\cos\left(\frac{28\pi}{3}\right)$
6. $\sin\left(-\frac{31\pi}{6}\right)$
7. $\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right)$
8. $\sin\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$

★Exercice 3.4

Trouver tous les réels x vérifiant les équations suivantes :

1. $\cos(x) = -\frac{1}{2}$
2. $\sin(x) = \frac{5}{4}$
3. $\sin(2x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
4. $\cos(x)\sin(3x) = 0$
5. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$
6. ☛ $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$
7. ☛ $\cos^2(x) - \frac{3}{2}\cos(x) = 1$

★Exercice 3.5

Trouver tous les réels x vérifiant les inégalités suivantes. On pourra s'aider du cercle trigonométrique.

1. $\cos(x) \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $\sin(x) < -\dfrac{1}{2}$
3. $-\dfrac{1}{2} < \sin(2x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
4. ☛ $\cos(x) > \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$

★Exercice 3.6

Résoudre l'équation : $\sqrt{2}\cos(x) + \sqrt{6}\sin(x) = 2$. On pourra commencer par factoriser le membre de gauche par $2\sqrt{2}$ et reconnaître une formule de trigonométrie.

Chapitre

4

Nombres complexes

★Exercice 4.1

1 – A quoi est égal i^7 ?

☐ 1 ☐ i ☐ $-i$ ☐ -1

2 – A quoi est égal $(1-2i)(-1+3i)$?

☐ $5+5i$ ☐ $-7+5i$ ☐ $-5-5i$ ☐ $-7-5i$

3 – A quoi est égal $\dfrac{1}{i}$?

☐ i ☐ $-i$ ☐ $1-i$ ☐ $-1+i$

4 – A quoi est égal $\dfrac{1}{-1-i}$?

☐ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ ☐ $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ ☐ $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ ☐ $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

5 – A quoi est égal $\dfrac{2-3i}{1+2i}$?

☐ $-\dfrac{4+7i}{5}$ ☐ $\dfrac{4-i}{5}$ ☐ $\dfrac{8-7i}{5}$ ☐ $\dfrac{4-7i}{5}$

6 – A quoi est égal $(1+i)^3$?

☐ $2+2i$ ☐ $2-2i$ ☐ $-2-2i$ ☐ $-2+2i$

7 – Quel est le nombre qui élevé au carré vaut i ?

☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$ ☐ $-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$ ☐ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}i$

8 – A quoi est égal $2(-i+1)(-2i)(-i-1)(-1-i)(i-1)$?

☐ $16i$ ☐ $-16i$ ☐ 16 ☐ -16

9 – Soit $z\in\mathbb{C}$, à quoi est égal $\overline{i(z-1)}$?

☐ $i\bar{z}-i$ ☐ $i\bar{z}+i$ ☐ $-i\bar{z}+i$ ☐ $-i\bar{z}-i$

10 – Quels sont les nombres z solutions de l'équation $z^2-2z+2=0$?

☐ i et $-i$ ☐ $1+i$ et $1-i$ ☐ $-1+i$ et $-1-i$ ☐ $2+2i$ et $2-2i$

11 – Quels sont les nombres z solutions de l'équation $z^2+(1-i)z-i=0$?

☐ 1 et $-i$ ☐ 1 et i ☐ -1 et i ☐ -1 et $-i$

12 – Quel est le module de $\dfrac{1}{-3+4i}$?

☐ $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ☐ $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ☐ $\dfrac{1}{25}$ ☐ $\dfrac{1}{5}$

13 – A quoi est égal $e^{i\frac{\pi}{6}}$?

☐ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ ☐ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ☐ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ ☐ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

14 – A quoi est égal $-e^{i\frac{\pi}{6}}$?

☐ $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ☐ $e^{i\frac{7\pi}{6}}$ ☐ $e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ☐ $e^{-i\frac{7\pi}{6}}$

15 – A quoi est égal $e^{7i\frac{\pi}{2}}$?

☐ 1 ☐ -1 ☐ i ☐ $-i$

16 – A quoi est égal $e^{-5i\frac{\pi}{4}}$?

☐ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ ☐ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ ☐ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ ☐ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

17 – A quoi est égal $\overline{e^{i\frac{\pi}{3}}}$?

☐ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ☐ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ ☐ $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ☐ $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

18 – Soit $\theta\in\mathbb{R}$, à quoi est égal $\dfrac{1}{e^{i\theta}}$?

☐ $e^{i\frac{1}{\theta}}$ ☐ $e^{-i\frac{1}{\theta}}$ ☐ $e^{-i\theta}$ ☐ $-e^{i\theta}$

19 – Soit $\theta\in\mathbb{R}$, à quoi est égal $ie^{i\theta}$?

☐ $e^{i\frac{\theta}{2}}$ ☐ $e^{i\theta+\frac{\pi}{2}}$ ☐ $e^{i\theta+i\frac{\pi}{2}}$ ☐ $e^{i\theta+i}$

20 – A quoi est égal $e^{i\frac{\pi}{3}}\times e^{-i\frac{\pi}{4}}$?

☐ $e^{-i\frac{\pi}{12}}$ ☐ $e^{i\frac{\pi}{12}}$ ☐ $-e^{i\frac{\pi}{12}}$ ☐ $e^{i\frac{\pi}{6}}$

21 – Quelle est la forme trigonométrique de $1-\sqrt{3}i$?

☐ $\dfrac{1}{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ ☐ $2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$

☐ $\dfrac{1}{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ ☐ $2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$

22 – Soit z un nombre complexe de module 1, à qoi est égal $\dfrac{1}{z}$?

☐ $\dfrac{1}{\overline{z}}$ ☐ $\overline{z}$ ☐ $-z$ ☐ $-\overline{z}$

23 – Quelle est l'image des points du plan complexe d'affixe $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z+i|\leqslant 2$?

☐ le cercle de centre $A(i)$ et de rayon 2 ☐ le disque de centre $A(-i)$ et de rayon 2

☐ le cercle de centre $A(-i)$ et de rayon 2 ☐ le disque de centre $A(i)$ et de rayon 2

24 – Soit $\theta\in\,]-\pi\,;\pi[$, à quoi est égal $\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$?

- ☐ $i\dfrac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$
- ☐ $i\dfrac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$
- ☐ $\dfrac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$
- ☐ $-i\dfrac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

★Exercice 4.2

Donner le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$A=-5 \qquad B=4-4i \qquad c=\frac{1}{-3i} \qquad D=(1+i\sqrt{3})^7 \qquad E=-\sqrt{3+\sqrt{2}}+i\sqrt{3+\sqrt{2}}$$

★Exercice 4.3

Trouver tous les nombres complexes dont le carré est $z=-3-4i$.

Chapitre 5

Dérivées et primitives

1. Dérivées

Rappel de cours : dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Dérivée	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité
$x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N})$	$x \mapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0\,;+\infty[$	$]0\,;+\infty[$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \ln x$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$	$]0\,;+\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1+\tan^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Rappel de cours : opérations sur les fonctions dérivables

Soit I un intervalle et u, v deux fonctions dérivables sur I.

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λu est dérivable sur I et $(\lambda u)' = \lambda u'$
- $u+v$ est dérivable sur I et : $(u+v)' = u'+v'$
- uv est dérivable sur I et : $(uv)' = u'v+uv'$
- Si v ne s'annule pas sur I, $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

• La formule suivante n'est pas explicitement au programme de terminale, mais vous l'avez surement rencontrée dans des cas particuliers.
Si u est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et v est dérivable sur un intervalle J tel que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$ alors $v \circ u$ est dérivable sur I et :

$$(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$$

Exemple

On prend une fonction u dérivable sur un intervalle I et strictement positive sur cet intervalle et la fonction $v : x \mapsto \sqrt{x}$. La fonction $v \circ u$ est alors définie sur I par $v \circ u(x) = v(u(x)) = \sqrt{u(x)}$ et est dérivable sur l'intervalle I. La fonction v a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. En appliquant la formule de la dérivée d'une fonction composée, on a

$$\left(\sqrt{u(x)}\right)' : x \mapsto u'(x) \times v'(u(x)) = u'(x) \times \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}$$

D'où la formule :

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

On en déduit les dérivées des fonctions composées suivantes :

Rappel de cours : dérivées des fonctions composées

On considère u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Fonction	Dérivée	Ensemble de dérivabilité
$u^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$nu'u^{n-1}$	I
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	en tout point de I où u est non nulle
$\dfrac{1}{u^n} \quad (n \in \mathbb{N})$	$-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$	en tout point de I où u est non nulle
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	en tout point de I où u est strictement positive
e^u	$u'e^u$	I
$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$	en tout point de I où u est strictement positive
$\sin u$	$u' \cos u$	I
$\cos u$	$-u' \sin u$	I

★Exercice 5.1

Calculer les dérivées des fonctions suivantes. On ne demande pas ici de donner l'ensemble de dérivabilité de la fonction.

$f_1 : x \mapsto e^{3x^2-2x+1}$ $\qquad f_2 : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ $\qquad f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x^7} - \dfrac{1}{x} + x^{-5}$

$f_4 : x \mapsto (x^2+3)^2$ $\qquad f_5 : x \mapsto \ln(5-4x)$ $\qquad f_6 : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{1-2x}$

$f_7 : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ $\qquad f_8 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad f_9 : x \mapsto \ln\left(x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right)$

$f_{10} : x \mapsto \dfrac{1}{3x^2-1}$ $\qquad f_{11} : x \mapsto \sqrt{x + \dfrac{1}{x}}$ $\qquad f_{12} : x \mapsto \dfrac{1}{(x^2-1)^3}$

$f_{13} : x \mapsto \cos(1-2x)$ $\qquad f_{14} : x \mapsto \dfrac{(2x)}{\cos(3x)}$ $\qquad f_{15} : x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x^2)}$

$f_{16} : x \mapsto \ln(\ln(x))$ $\qquad f_{17} : x \mapsto \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$ $\qquad f_{18} : x \mapsto \sin(x)\cos^2(x)$

★Exercice 5.2

Donner l'ensemble de dérivabilité et calculer les dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad f_2 : x \mapsto \frac{\ln\sqrt{3x+7}}{4-x^2} \qquad f_3 : x \mapsto (x^3+x-2)^4$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{1}{e^x+e^{-x}} \qquad f_5 : x \mapsto \left(\cos^2(x)+\frac{3}{2}\right)\sin(2x) \qquad f_6 : x \mapsto \frac{(\ln(x))^4}{x}$$

$$f_7 : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)+2}} \qquad f_8 : x \mapsto \sqrt{x^2+6x-1} \qquad f_9 : x \mapsto \sin\left(\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)$$

2. Primitives

Rappel de cours Formulaire des primitives

On rappelle qu'on appelle **primitive** d'une fonction f définie sur un intervalle I toute fonction F dérivable sur I et vérifiant $F' = f$.

Fonction	Une primitive	Domaine de validité
$x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x$	sur tout intervalle inclus dans $]0\,;+\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x}$	sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geqslant 2)$	$x \mapsto -\frac{1}{(-n+1)x^{n-1}}$	sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$

★Exercice 5.3

Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes et donner le domaine de définition de cette primitive :

$$f_1 : x \mapsto x^3-2x^2+6x+4 \qquad f_2 : x \mapsto \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} \qquad f_3 : x \mapsto 2\sin x+\cos x$$

$$f_4 : x \mapsto e^x+e^{-x} \qquad f_5 : x \mapsto 1+\tan^2 x \qquad f_6 : x \mapsto \frac{1}{x^5}$$

Rappel de cours : Formes à savoir reconnaître

• Le tableau du paragraphe précédent sur les dérivées des fonctions composées peut également se lire à l'envers pour obtenir les relations suivantes où u désigne une fonction à valeurs réelles :

Fonction	Une primitive	Domaine de validité
$u'e^u$	e^u	sur tout intervalle où u est dérivable
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	sur tout intervalle où u est dérivable et strictement positive
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$	sur tout intervalle où u est dérivable et strictement positive
$u'u$	$\dfrac{1}{2}u^2$	sur tout intervalle où u est dérivable
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	sur tout intervalle où u est dérivable et ne s'annule pas
$u'u^n \quad (n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1)$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$	sur tout intervalle où u est dérivable (et ne s'annule pas si $n \leqslant -2$)
$u' \sin u$	$-\cos u$	sur tout intervalle où u est dérivable
$u' \cos u$	$\sin u$	sur tout intervalle où u est dérivable

• Parfois, il faut jouer sur les coefficients pour faire apparaître la forme voulue. Par exemple si on cherche une primitive sur $\mathbb{R}$ de

$$f : x \mapsto \frac{4x+2}{(x^2+x+1)^2}$$

Le dénominateur est strictement positif sur $\mathbb{R}$ ainsi f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On pose $u : x \mapsto x^2+x+1$. On a $u' : x \mapsto 2x+1$. On fait apparaître une expression de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$:

$$f(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = 2\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$$

Une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ est $-\dfrac{1}{u}$, donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est :

$$F : x \mapsto \frac{-2}{x^2+x+1}$$

★Exercice 5.4

Trouver une primitives des fonctions suivantes. On précisera l'ensemble de définition de la primitive choisie.

$f_1 : x \mapsto \dfrac{2x}{(4+x^2)^2}$ $\quad f_2 : x \mapsto \dfrac{3x^2}{1+4x^3}$ $\quad f_3 : x \mapsto 7\cos(x)\sin^4(x)$

$f_4 : x \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ $\quad f_5 : x \mapsto \dfrac{2x+1}{3x^2+3x+7}$ $\quad f_6 : x \mapsto 2x(3x^2-1)^3$

$f_7 : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ $\quad f_8 : x \mapsto \dfrac{1}{(3x-2)^4}$ $\quad f_9 : x \mapsto (6x^2+8)\sin(x^3+4x)$

$f_{10} : x \mapsto (6x+3)\sqrt{x^2+x+1}$ $\quad f_{11} : x \mapsto \dfrac{x^2}{(x^3-2)^2}$ $\quad f_{12} : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$

$f_{13} : x \mapsto \cos^2(x)$ $\quad f_{14} : x \mapsto \sqrt{5x+4}$ $\quad f_{15} : x \mapsto \dfrac{2x+5}{(x^2+5x+8)^4}$

$f_{16} : x \mapsto \cos^3(x)$ $\quad f_{17} : x \mapsto \tan(x)$ $\quad f_{18} : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x(1+(\ln(x))^2)}$

$f_{19} : x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x}$ $\quad f_{20} : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ $\quad f_{21} : x \mapsto \cos(x)\sin(x)$