Cahier de vacances PC/PSI

Barbara Hérau-Dostal, Guillaume Gallois

Saint-Stanislas, Juin 2023

1 Exercices type CCINP (à chercher en priorité)

Exercice 1 (nombres complexes) On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des complexes solutions de l'équation $z^n = 1$, et $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on écrit $(3+4i)^n = A_n + iB_n$ avec A_n et B_n dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\dfrac{3+4i}{5}\right)^n \in \mathbb{U}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer A_{n+1} et B_{n+1} en fonction de A_n et B_n.
4. Montrer que les suites (A_n) et (B_n) sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le reste de la division euclidienne de A_n par 5 est 3, et le reste de la division euclidienne de B_n par 5 est 4.
6. En déduire que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n \neq \mathbb{U}$.

Exercice 2 (nombres complexes et polynômes) Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on note : $\cot t = \dfrac{1}{\tan t}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $(\cos t + i \sin t)^{2n+1}$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.
2. En déduire qu'il existe un polynôme P_n, que l'on explicitera, tel que, pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$,
$$\sin[(2n+1)t] = (\sin t)^{2n+1} P_n(\cot^2 t)$$
3. Justifier que la somme des racines de P_n est égale à $\frac{n(2n-1)}{3}$.
4. Expliciter les racines de P_n.
5. Démontrer que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin t \leq t \leq \tan t$.
6. Montrer que pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$,
$$\cot^2 t \leq \frac{1}{t^2} \leq 1 + \cot^2 t$$
7. En déduire
$$\frac{n(2n-1)}{3} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{\pi^2 k^2} \leq n + \frac{n(2n-1)}{3}$$
8. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 3 (suite récurrente) Soient $f\colon x \mapsto \dfrac{x(1+2x)}{1+3x}$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) Montrer que (u_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) Justifier que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. Déterminer la limite de la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

3. On admet le théorème de Césaro : si $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_0 + \cdots + a_{n-1}}{n} = \ell$.

   Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k$.

   En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 (série numérique) Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $1 + a < b$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$$

1. Trouver un équivalent de $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ quand $n \to +\infty$.
2. Montrer que $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -\infty$. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
3. On pose $\alpha = b - a$ et $v_n = n^\alpha u_n$. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geq 1} \ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ converge.
4. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^\alpha}$.
5. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ converge.
6. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 \frac{1-b}{a-b+1}$$

Exercice 5 (sommes de Riemann)

1. Rappeler le théorème sur les sommes de Riemann.
2. En déduire la limite de $\mathrm{S_n} = \sum\limits_{\mathrm{k}=1}^{n} \dfrac{1}{\mathrm{n}} \sin\left(\dfrac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Calculer la limite de $\mathrm{T_n} = \sum\limits_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \dfrac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, démontrer que $\forall x \in [0, 1], \quad |\sin x - x| \leqslant \dfrac{x^3}{6}$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - T_n| \leq \dfrac{1}{n^2}$.

   En déduire la limite de $\mathrm{u}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 6 (fonction définie par une intégrale) On considère

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t} \mathrm{d}t$$

1. Expliquer pourquoi la fonction f est définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]0, +\infty[$.
2. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur I.
3. On étudie f au voisinage de 0.
   (a) Déduire du développement limité de ch au voisinage de 0, qu'il existe un réel $\alpha > 0$ assez petit pour que

   $$\forall t \in]0, \alpha[, \quad 0 \leqslant \frac{\operatorname{ch} t - 1}{t} \leqslant t$$

   (b) En déduire que pour certains réels x (on précisera lesquels) :

   $$0 \leqslant f(x) - \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_x^{2x} t \, \mathrm{d}t$$

   (c) En déduire que $f(x) = \ln 2 + \underset{x \to 0}{o}(x)$.

(d) Déterminer la tangente à la courbe représentative de f au point $(0, f(0))$.

Exercice 7 (suite d'intégrales) Pour tout $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{I_n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{t^n}}{1+\mathrm{t}}\mathrm{dt}$$

1. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, qu'elle est positive et décroissante.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
   En déduire la limite de $(\mathrm{I_n})_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que
$$\mathrm{I_n} = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$$
4. On note $A_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$. Montrer que $A_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ quand $n \to +\infty$.
   En déduire un équivalent de I_n quand $n \to +\infty$.
5. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathrm{I_n}$ est-elle convergente ?

Exercice 8 (équation différentielle)

1. Calculer l'expression de la fonction f qui vérifie l'équation différentielle
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 0$$
   et telle que $f(0) = 3$ et $f'(0) = -2$.
2. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $t = 0$ de $f(t)$. En déduire l'allure du graphe de f au voisinage de l'origine.
3. Étudier le comportement de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
4. Démontrer que le produit $e^t f(t)$ est borné sur $\mathbb{R}$ et qu'il atteint ses bornes.

Exercice 9 (matrice, noyau et image d'applications linéaires) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

1. Soit u l'application linéaire définie par :
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad u(P) = XP(1) + (X^2 - 4)P(0)$$
   Déterminer le noyau et l'image de u. On précisera leurs dimensions respectives.
2. Soit $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, définie par :
$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ 3d & a+d \end{pmatrix}$$
   (a) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer la matrice A de f dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ où $E_{i,j}$ désigne la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient de la i-ème ligne, j-ième colonne, qui vaut 1.
   (c) Déterminer le noyau et l'image de f.
3. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^n e^{-x}$.
   Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, ..., e_N)$.
   On note pour tout $f \in E$, $\Delta(f) = f'' - f' - 2f$.
   (a) Montrer que $(e_0, ..., e_N)$ est une base de E.
   (b) Vérifier que Δ est un endomorphisme de E.
   (c) Pour $N = 2$. Ecrire la matrice de f dans la base (e_0, e_1, e_2). Préciser le noyau et l'image de Δ.

Exercice 10 (endomorphisme défini par sa matrice dans une base) On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A.

1. Déterminer $u(e_1)$ avec $e_1=(1,-1,1)$.
2. La matrice A est-elle inversible ?
3. Montrer que u est une symétrie de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer une base orthonormée de $\ker(u-\mathrm{id})$ que l'on notera (a_1,a_2).
5. Déterminer un vecteur a_3 tel que $\ker(u+\mathrm{id})=\mathrm{Vect}(a_3)$.
6. Montrer que (a_1,a_2,a_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Déterminer la matrice de u dans la base (a_1,a_2,a_3) que l'on note B.
8. Déterminer la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à (a_1,a_2,a_3). Exprimer B en fonction de A et P.

Exercice 11 (projection orthogonale, distance à un sev) L'espace $E=\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère les vecteurs

$$e_1=(1,1,-1,1)$$
$$e_2=(2,1,-2,2)$$
$$e_3=(1,2,-3,1)$$

et le sous-espace $H=\mathrm{Vect}\,(e_1,e_2,e_3)$. On note p_H la projection orthogonale sur H.

1. Démontrer que H est un hyperplan de E et calculer une équation cartésienne de H.
2. Déterminer une base orthogonale (h_1,h_2,h_3) de H.
3. Pour $x\in E$, exprimer $p_H(x)$ en fonction de x et des vecteurs h_i.
4. Calculer la matrice de la projection orthogonale sur H, relativement à la base canonique de E. On notera A cette matrice.
5. Sans utiliser la question précédente, déterminer la matrice B de la projection orthogonale sur $H^\perp$ notée $p_{H^\perp}$, relativement à la base canonique de E.
   Quelle relation est vérifiée par les matrices A et B ?
6. Calculer la distance du vecteur $a=(1,0,0,0)$ au sous-espace H.

Exercice 12 Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in]0,1[$.
Soit X,Y_1,Y_2 et Z quatres variables aléatoires indépendantes, telles que :

- X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$: $X\sim\mathcal{B}(n,p)$.
- Y_1 et Y_2 suivent une loi uniforme sur $\{1,\cdots,n\}$,
- Z suit une loi de Bernoulli de paramètre p : $Z\sim\mathcal{B}(p)$.

On note $T=\max(Y_1,Y_2)$, $U=X+Y$, $V=X-Y$ et $W=XZ$.

1. Préciser les espérances et variances de X,Y_1,Y_2 et Z.
2. Déterminer les espérances et variances de U,V et W.
3. Calculer $\mathbf{P}(X=Y)$.
4. Loi de T.
   (a) Calculer pour $k\in\{1,\cdots,n\}$, $\mathbf{P}(T\leq k)$.
   (b) Déterminer la loi de T.
   (c) Calculer l'espérance de T.
5. Loi de W.
   (a) Déterminer la loi de W.
   (b) Calculer l'espérance de W.

Exercice 13 On effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie équilibrée. On note P_k (respectivement F_k) l'évènement « le résultat du k-ème lancer est pile (respectivement face) ».
Pour simplifier les écritures, on note par exemple l'évènement $P_1\cap F_2$ par P_1F_2.
On définit la variable aléatoire X égale k ($k\geq 2$) si l'on obtient pour la première fois pile au $(k-1)$-ème lancer suivi de face au k-ème lancer.
X est égal à 0 si le motif PF n'apparaît jamais.
On définit la variable aléatoire Y égale à k ($k\geq 2$) si l'on obtient pour la première fois pile au $(k-1)$-ème lancer suivi de pile au k-ème lancer. Y est égal à 0 si le motif PP n'apparaît jamais.

1. Calculer $\mathbf{P}(X=2)$.
2. (a) Soit k un entier supérieur ou égal à 3. Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{P_1}(X=k)$ puis en déduire que :

$$\mathbf{P}(X=k)=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2}\,\mathbf{P}(X=k-1)$$

   (b) On pose, pour tout $k \geq 2$, $u_k = 2^k\,\mathbf{P}(X = k)$. Déterminer u_k en fonction de k et en déduire la loi de X.

3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

4. (a) Calculer $\mathbf{P}(Y = 2)$ et $\mathbf{P}(Y = 3)$.

   (b) Montrer que (F_1, P_1, P_2, P_1F_2) est un système complet d'évènements.

   (c) En déduire pour tout entier $k \geq 4$, une expression de $\mathbf{P}(Y = k)$ en fonction de $\mathbf{P}(Y = k - 1)$ et $\mathbf{P}(Y = k - 2)$.

   (d) Pour tout $k \geq 2$, on pose $v_k = \mathbf{P}(Y = k)$ et $(v_0, v_1) = (1, 0)$. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$,

$$v_k = \frac{1}{2}v_{k-1} + \frac{1}{4}v_{k-2}$$

   (e) En déduire la loi de Y.

   (f) Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

2 Exercices type Centrale/Mines

Exercice 14 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul vérifiant

$$(E) : P(X^2) = P(X)P(X+1)$$

1. Montrer que si λ est racine non nulle de P alors $|\lambda| = 1$.
2. Trouver tous les polynômes complexes vérifiant (E).
   Indication : on pourra remarquer que si λ est racine de P alors $(\lambda-1)^2$ est racine de P.

Exercice 15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ égales à leur comatrice.

(indication : on définit la comatrice de A, notée $Com(A)$ comme la matrice de coefficients $(Com(A))_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$ où $A_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ extraite de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne.)

Exercice 16 On considère pour tout entier naturel n,

$$u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{\cdots + \sqrt{1+\sqrt{0}}}}}$$

Expliciter une relation simple entre u_n et u_{n-1}. Donner un équivalent puis un développement à 2 puis 3 termes pour u_n.

Exercice 17 Soient E un espace euclidien et $e = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.
On définit pour $x \in E$,

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. L'endomorphisme u est-il injectif ? Surjectif ?
3. Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $(u(x)|y) = (x|u(y))$.
4. À quelle condition u est-il un projecteur ?

Exercice 18 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E. Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux si, et seulement si, pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = d^2(x, F) + d^2(x, G)$.

Exercice 19

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel a_n tel que
$$e^{a_n} + na_n = 2$$
2. Montrer que (a_n) converge vers 0 et déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$.
3. Déterminer un équivalent de a_n.
4. Déterminer la limite de $n(1-na_n)$ quand $n \to +\infty$. En déduire un développement asymptotique à deux termes de a_n.

Exercice 20 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.
Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes telles que A suit une loi binomiale de paramètres (n, p) et B suit une loi uniforme sur $\{1, \cdots, n\}$.
Déterminer la probabilité que toutes les solutions de l'équation :

$$(E_w) \quad y'' + [A(w) - 1]y' + B(w)y = 0$$

tendent vers 0 en $+\infty$.